Exponenciální funkce

$$f\colon\ y = a^x \qquad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

(a – základ, neznámá je v exponentu)

Speciální případy:

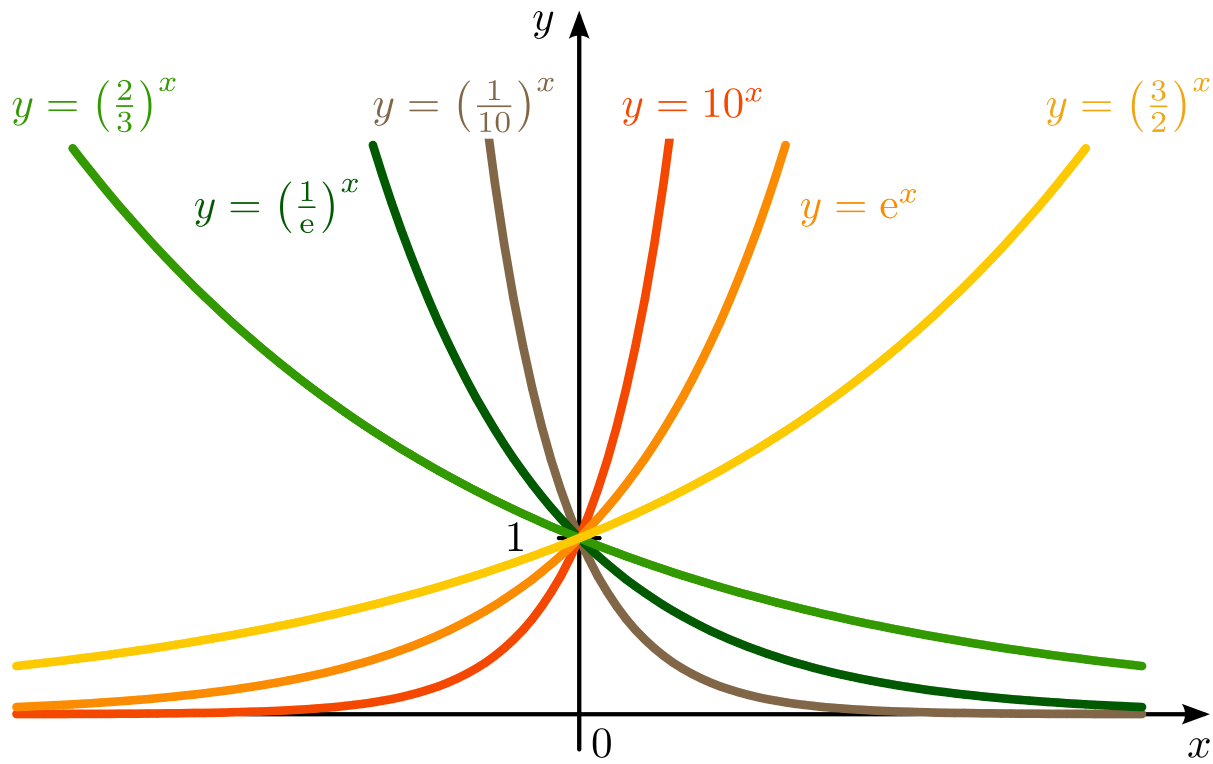
- $f_1\colon\ y = e^x$ – přirozená exp. funkce (e – Eulerovo číslo 2,7182818284. . .)
- $f_2\colon\ y = 10^x$ – dekadická exp. funkce $a = 10$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\mathcal{D}(\mathrm{f}) = \mathbb{R}$.
- Obor funkčních hodnot $\mathcal{H}(\mathrm{f})$ je interval $(0, +\infty)$.
- Je zdola omezená, $a^x > 0$. Shora neomezená.
- Nemá maximum, ani minimum.
- Monotonnost funkce záleží na hodnotě a:
  Je-li $a \in (0, 1)$, je funkce klesající.
  Je-li $a \in (1, +\infty)$, je funkce rostoucí.
- Exponenciální funkce je prostá.
- Grafem je exponenciální křivka (exponenciála).

Graf exponenciální funkce

Grafy několika exponenciálních funkcí pro různé hodnoty základu a. Pro $0 < a < 1$ je funkce klesající, pro $a > 1$ je funkce rostoucí.



„Exponenciální růst“

Termín „exponenciální růst“ značí, že něco narůstá strašně rychle. Př. dělení bakterií (rozdvojování). Množení lze popsat exponenciální funkcí $f(x) = 2^x$. Funkční hodnota udává počet bakterií po x kolech dělení. Doba mezi dvěma děleními se označuje jako *generační doba*. Doba potřebná k zdvojnásobení počtu buněk v kolonii se nazývá *doba zdvojení*.

Příklad:
Na začátku je jedna bakterie $2^0 = 1$. Po prvním kole množení máme $2^1 = 2$, tj. dvě bakterie. Množení, ač se to nezdá, je velmi rychlé. Po desátém kole máme $2^{10} = 1024$ bakterií. Po třiceti kolech je jich přes miliardu.

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$

$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$
$2^{20} = 1048576$
$2^{30} = 1073741824$ 10 cifer
$2^{40} = 1099511627776$ 13 cifer
$2^{50} = 1125899906842624$ 16 cifer

$2^{64} = 18446744073709551616$ 20 cifer
$2^{100} = 1267650600228229401496703205376$ 31 cifer
$2^{128} = 340282366920938463463374607431768211456$ 39 cifer
$2^{500} = 3273390607896141870013189696827599152216 \ldots 27589376$ 151 cifer
$2^{1000} = 1071508607186267320948425049060001810561 \ldots 68069376$ 302 cifer

Rychlost exponenciálního růstu je od určitého okamžiku nesrovnatelně větší než v případě kvadratické (resp. jakékoliv mocninné) závislosti!

Zajímavosti:

Počet všech atomů ve vesmíru o poloměru cca 15 miliard světelných let se odhaduje na 10^{128}, počet všech možných kombinací atomů v jednoduchém genu bakterie je asi 10^{602}, tedy číslo, které má o 474 nul více!
Počet stavů v paměti běžného počítače, tj. počet možných konfigurací 1 a 0 v této paměti, je cca $10^{10000000000000000000}$. To je počet stavů operační paměti (není v tom započten disk). Kdyby byl každý atom ve vesmíru počítačem, který by mohl analyzovat 10^{100} stavů za sekundu, neuplynula by od velkého třesku dostatečně dlouhá doba, aby bylo možné všechny stavy paměti počítače zanalyzovat.

Kolikrát lze přeložit list papíru? (tenký papír o tloušťce 0,001 cm tj. 0,1 mm)
10x přeložení - cca 1 cm
17x přeložení - cca 1 m
27x přeložení - cca 1342 m

Binární strom

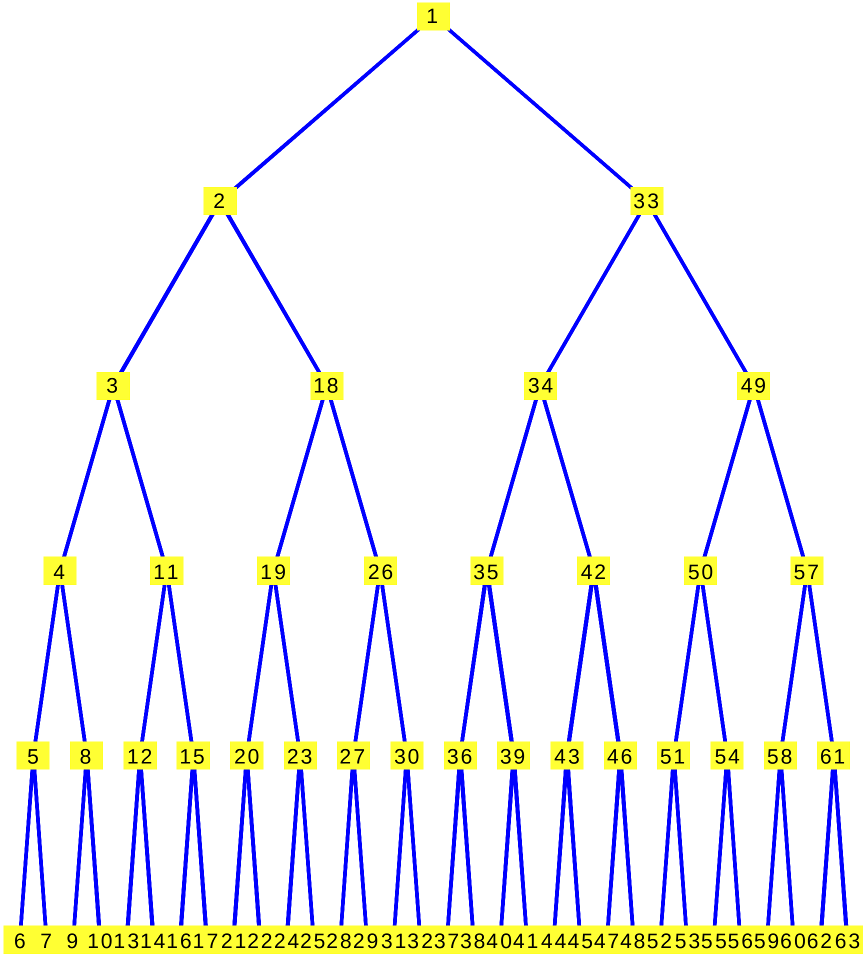
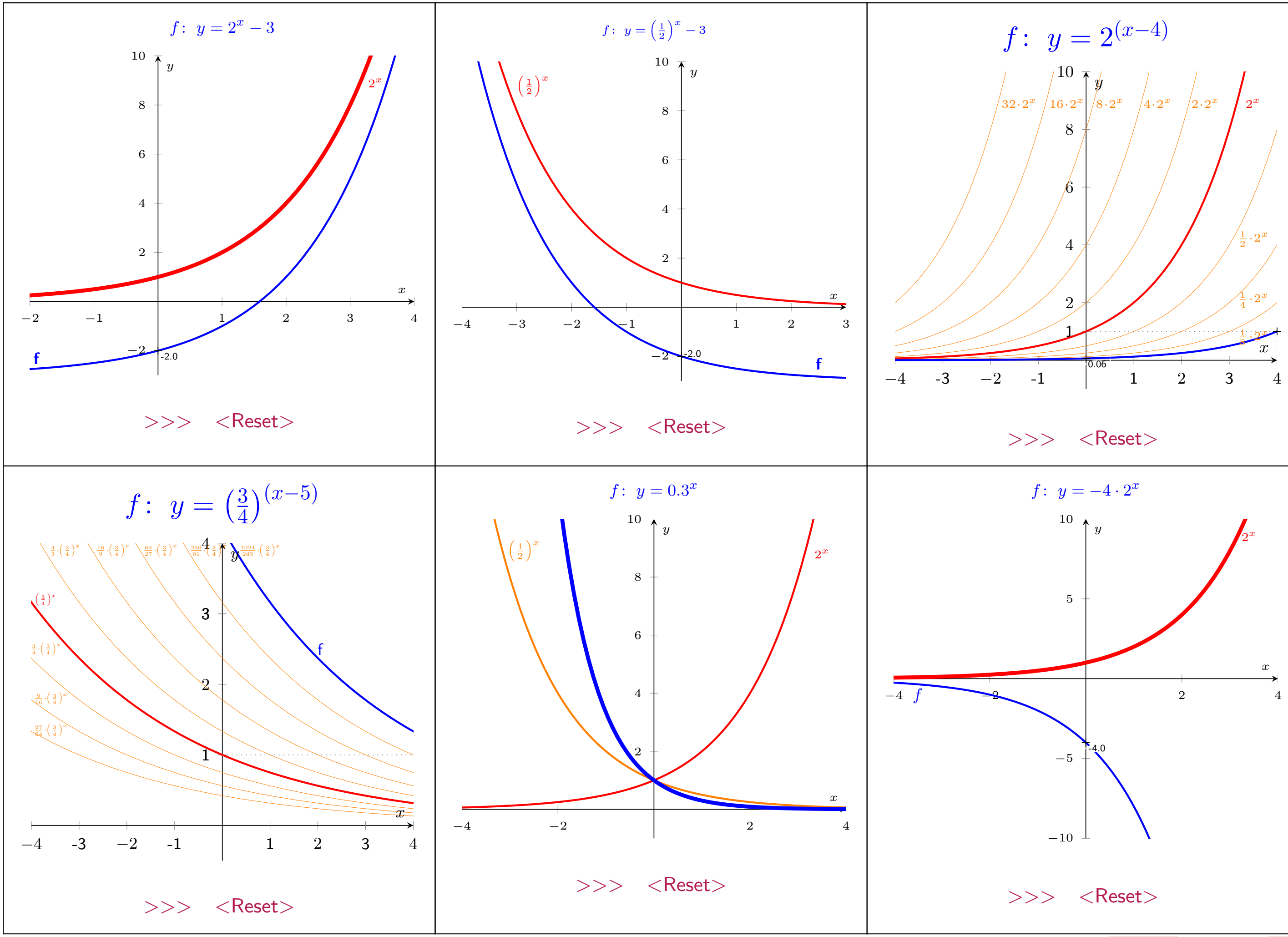


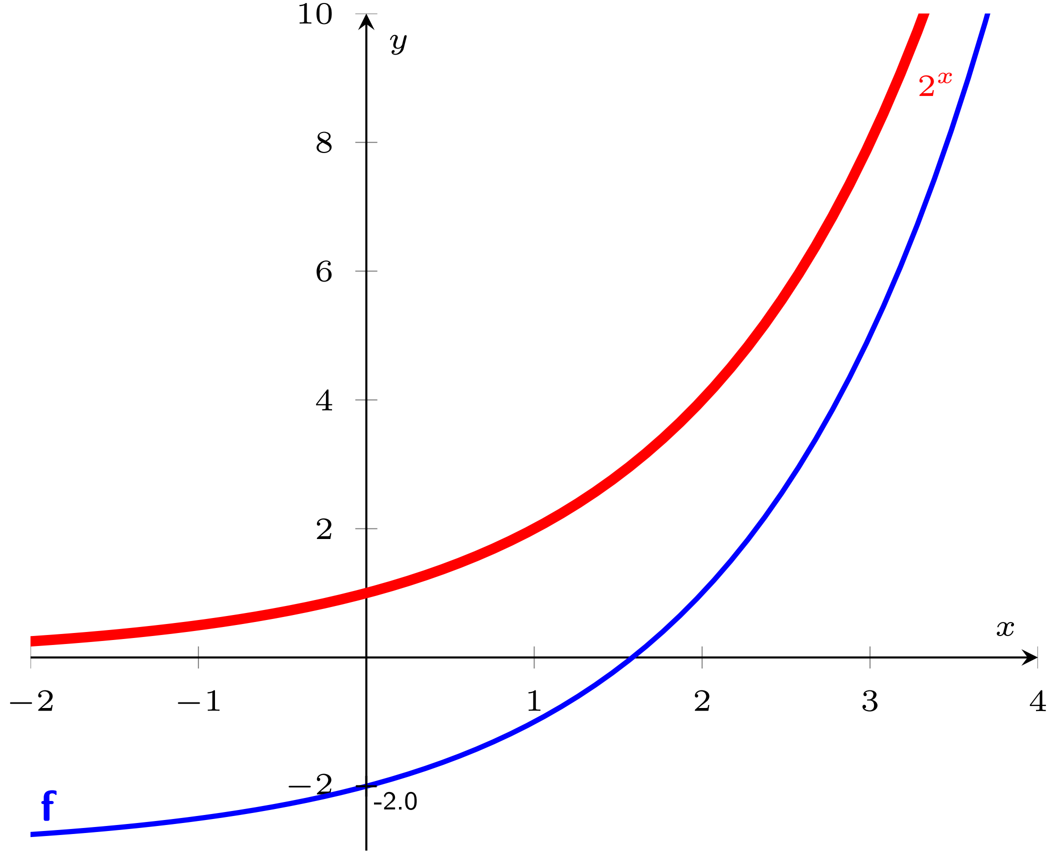
Schéma tzv. binárního stromu - princip zdvojování bakterií.

Grafy exponenciálních funkcí



Je-li $f: y = b \cdot a^{(x+c)} + d, \quad a = 2, b = 1, c = 0$ funkční předpis exponenciální funkce, pak koeficient d je zodpovědný za vertikální posunutí exponenciální křivky.

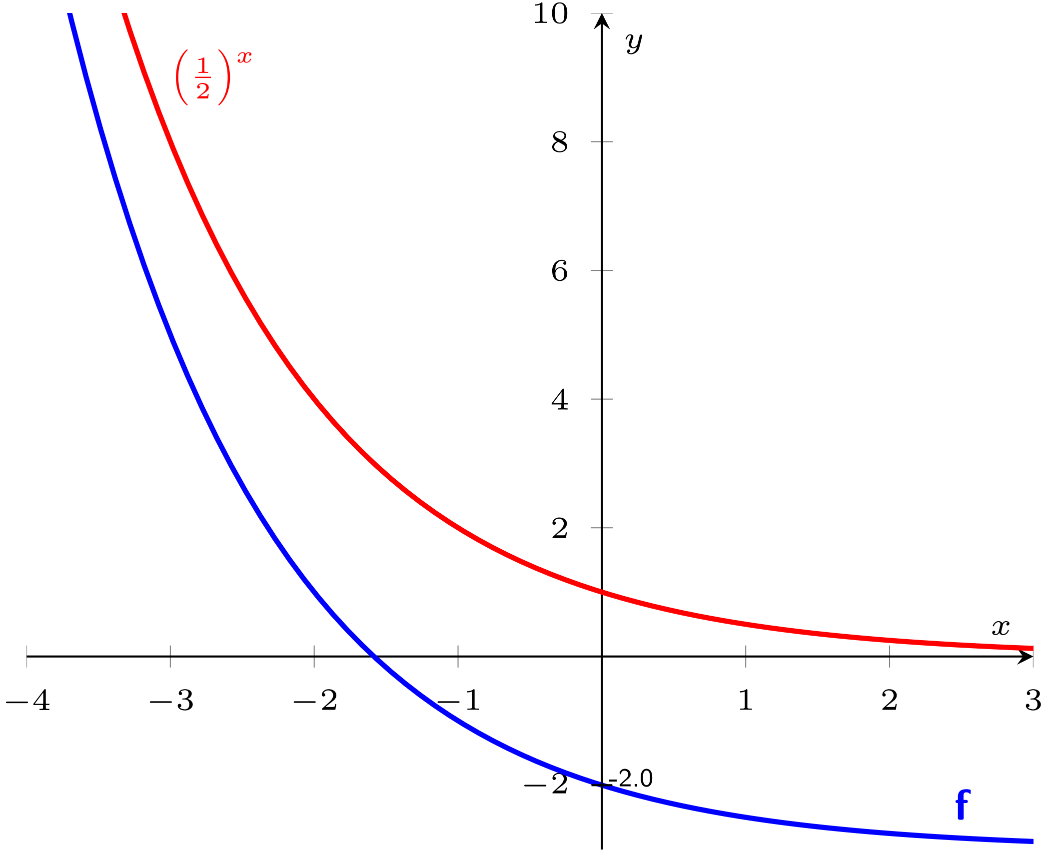
$$f: \; y = 2^x - 3$$



>>> Klikni ZDE pro další snímek >>> <Reset>

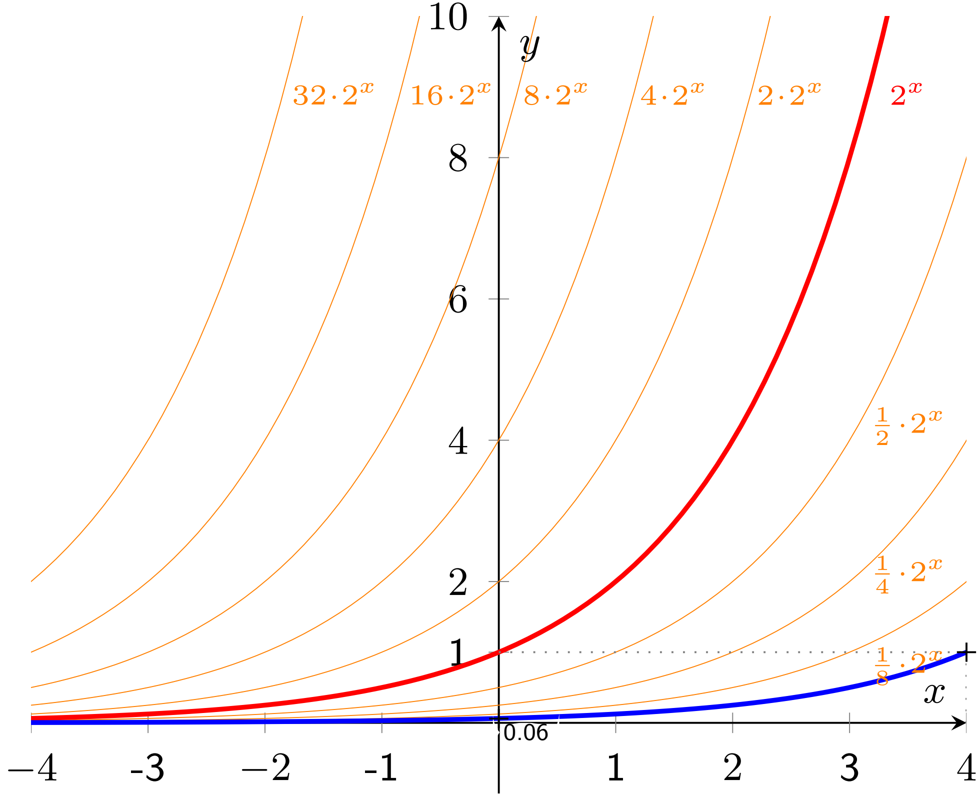
Je-li $f: y = b \cdot a^{(x+c)} + d, \quad a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 0$ funkční předpis exponenciální funkce, pak koeficient d je zodpovědný za vertikální posunutí exponenciální křivky.

$$f: \ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$$



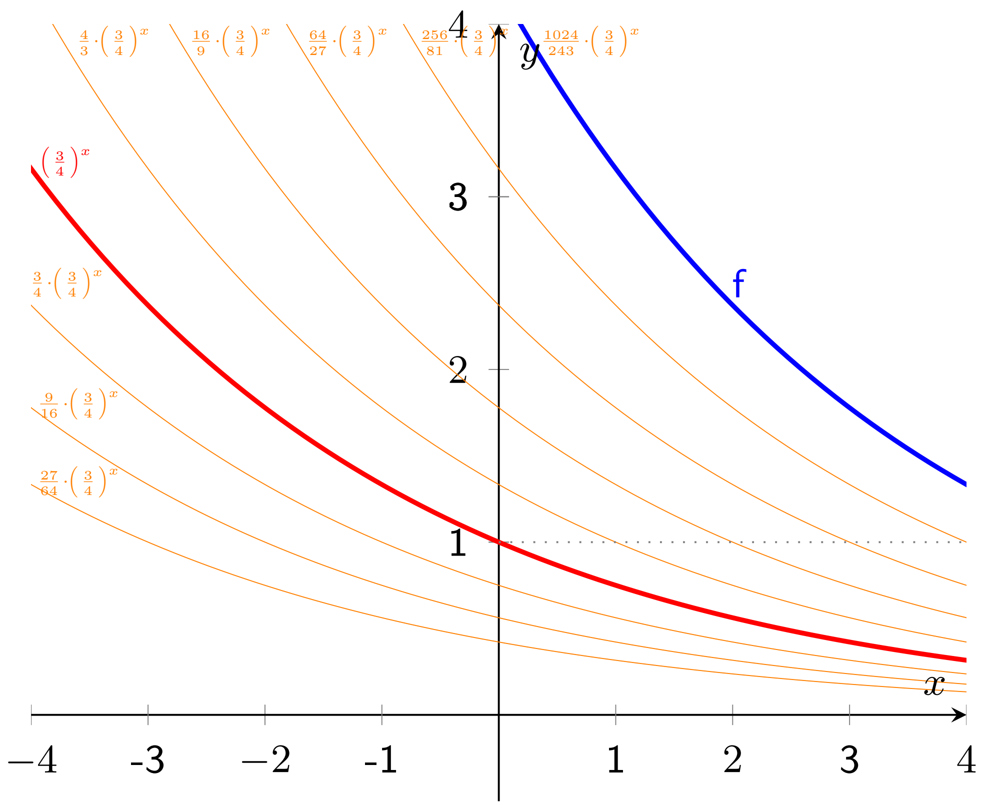
Je-li $f: y = b \cdot a^{(x+c)} + d, \quad a = 2, b = 1, d = 0$ funkční předpis exponenciální funkce, pak ačkoliv se zdá, že koeficient c určuje tvar (míru prohnutí) exponenciály, tak je ve skutečnosti zodpovědný pouze za horizontální posunutí exponenciální křivky.

$$f: \ y = 2^{(x-4)}$$



Je-li $f: y = b\cdot a^{(x+c)} + d, \quad a = \frac{3}{4}, b = 1, d = 0$ funkční předpis exponenciální funkce, pak ačkoliv se zdá, že koeficient c určuje tvar (míru prohnutí) exponenciály, tak je ve skutečnosti zodpovědný pouze za horizontální posunutí exponenciální křivky.

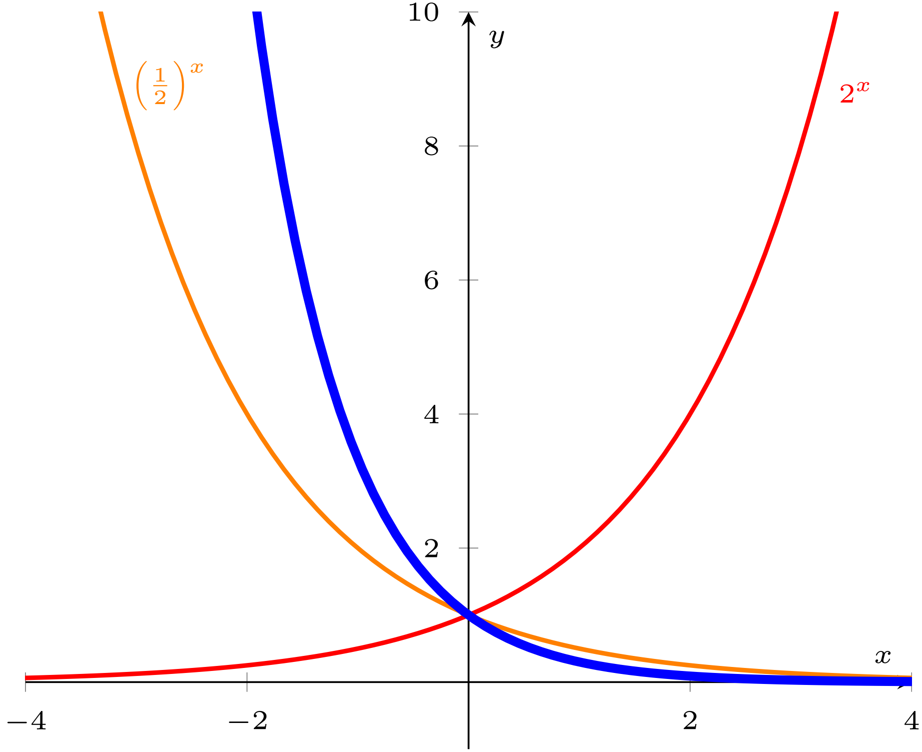
$$f:\ y = \left(\frac{3}{4}\right)^{(x-5)}$$



>>> Klikni ZDE pro další snímek >>> <Reset>

Je-li $f: y = b \cdot a^{(x+c)} + d, \quad b = 1, c = 0, d = 0$ funkční předpis exponenciální funkce, pak koeficient a určuje tvar (míru prohnutí) exponenciály a charakter monotonnosti exponenciální křivky. Na druhou stranu platí $p^x = a^{k \cdot x}$ (pro vhodné hodnoty), takže exponenciální funkci při nějakém základu lze vyjádřit pomocí exp. funkce při jiném libovolném základu.

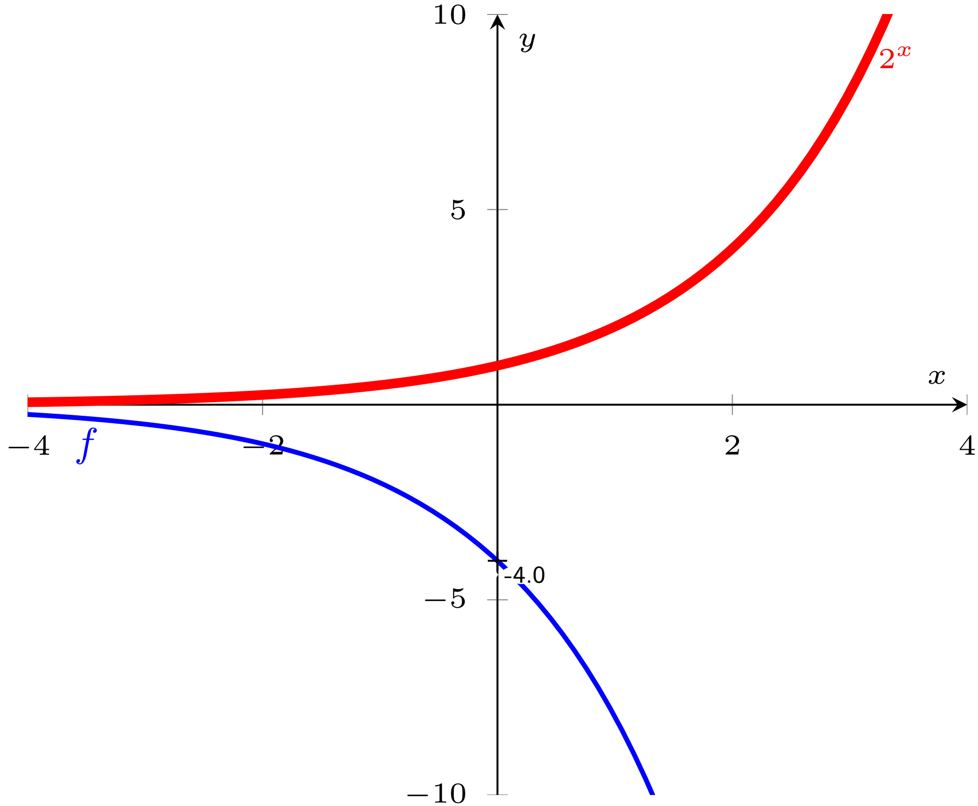
$$f: \; y = 0.3^x$$



>>> Klikni ZDE pro další snímek >>> <Reset>

Je-li $f: y = b \cdot a^{(x+c)} + d, \quad a = 2, c = 0, d = 0$ funkční předpis exponenciální funkce, pak $|b|$ určuje horizontální posunutí exponenciály. Znaménko parametru b určuje, zda bude křivka nad osou o_x či pod ní.

$$f: \; y = -4 \cdot 2^x$$



>>> Klikni ZDE pro další snímek >>> <Reset>

Je-li $f: y = b \cdot a^{(x+c)} + d, \quad a = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0$ funkční předpis exponenciální funkce, pak $|b|$ určuje horizontální posunutí exponenciály. Znaménko parametru b určuje, zda bude křivka nad osou o_x či pod ní.

$$f\colon\ y = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$